PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2017

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & si\ x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & si\ x>2 \end{cases}$:

a) Calcula razonadamente los parámetros $a\ y\ b$ para que $f(x)$ sea derivable en todo R.

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo $[-2,6]$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua $\forall a,b\in R$. Se trata de determinar los valores de α y b para que sea derivable en el punto crítico $x=2$.

Para que la función sea continua en $x=2$ es necesario que sus límites laterales en ese punto sean iguales e iguales al valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+a)=4+a=f(2) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(-x^2+bx-9)=-4+2b-9=2b-13 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 4+a=2b-13;\ \ a-2b=-17.$ (1)

La función $f(x)$ es derivable $\forall a,b\in R$, excepto para el valor crítico $x=2$, cuya derivabilidad vamos a forzar determinando los correspondientes valores de $a\ y\ b$.

Una función es derivable en un punto cuando es continua en ese punto y, además, sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \quad si \quad x \le 2 \\ -2x + b \;\; si \;\; x > 2 \end{cases}.$$

$f'(2^-) = 2 \cdot 2 = 4.$ $\qquad f'(2^+) = -2 \cdot 2 + b = -4 + b.$

$f'(2^-) = f'(2^+) \;\Rightarrow 4 = -4 + b \;\Rightarrow b = 8;\;\; a - 2 \cdot 8 = -17 \;\Rightarrow a = -1.$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ R\ para\ a = -1\ y\ b = 8}$.

$b)$

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Para $a = -1\ y\ b = 8$ es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \quad si\ x \le 2 \\ -x^2 + 8x - 9 \;\; si\ x > 2 \end{cases}$.

$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$

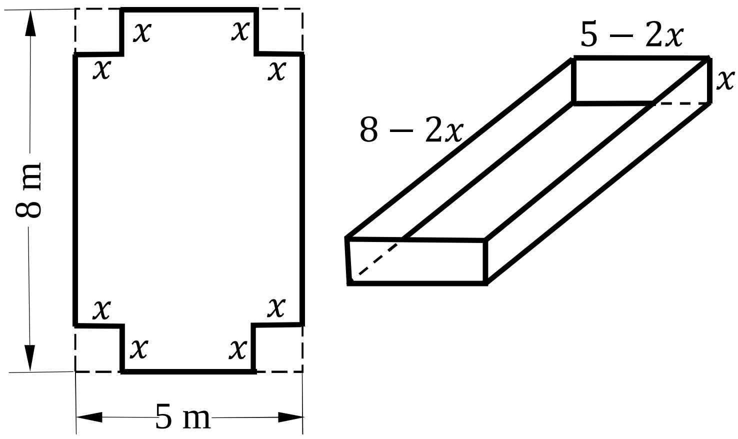
$f(6) = -6^2 + 8 \cdot 6 - 9 = -36 + 48 - 9 = 3.$

Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ en continua en R, por lo tanto le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, el intervalo dado $[-2, 6]$:

$\underline{A\ la\ función\ f(x)\ le\ es\ aplicable\ el\ teorema\ de\ Rolle\ por\ ser\ f(-2) = f(6)}$.

****

2º) Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.



De la observación de la figura se deduce que:

$V(x) = x \cdot (8-2x)(5-2x) = x \cdot (4x^2 - 26x + 40) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$

Para que el volumen sea máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40.$

$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 52x + 40 = 0;\ \ 3x^2 - 13x + 10 = 0;$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \frac{13 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{10}{3}.$

La solución $x = \frac{10}{3}$ carece de sentido por ser imposible la construcción del cajón por ser $2x = \frac{20}{3} > 5$ metros.

La solución lógica de máximo es para $x = 1$ metro. Se comprueba a continuación:

$V''(x) = 24x - 52.$

$V''(1) = 24 - 52 < 0 \ \Rightarrow Máximo\ para\ x = 1.$

$\underline{Las\ dimensiones\ del\ cajón\ son\ 6\ \times 3\ \times 1\ metros\ y\ su\ volumen\ 18\ m^3.}$

****

3º) a) Discute el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + z = a - 4 \\ 2x + y - az = a - 1 \\ y - z = -3 \end{cases}$ en función del parámetro $a \in R$.

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 & a-4 \\ 2 & 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a + 2 + a^2 - 2 = 0;\ a^2 - a = 0;\ \ a(a-1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$

$$\underline{Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 - 6 = -14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 - 6 = -15 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $a = -1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} -x - y + z = -5 \\ 2x + y + z = -2 \\ y - z = -3 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(-1)^2 - (-1)} = \frac{5-2+3+3+5+2}{1+1} = \frac{16}{2} = 8.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-6-3-10}{2} = -\frac{21}{2} = -10{,}5.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3-10-2-6}{2} = -\frac{15}{2} = -7{,}5.$$

$$\underline{Solución: x = 8;\ y = -10{,}5;\ z = -7{,}5.}$$

****

4º) Dado el punto $P(2,0,-1)$ las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ x + y = -1 \end{cases}$:

a) Determina razonadamente la posición relativa de las rectas $r\ y\ s$.

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por P es paralelo a r y a s.

----

a)

La expresión de la recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = -4 - 2\lambda \\ x + y = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = -5 - 2\lambda;$$

$$x = -\frac{5}{2} - \lambda. \qquad y = -1 - x = -1 + \frac{5}{2} + \lambda = \frac{3}{2} + \lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{2} - \lambda \\ y = \frac{3}{2} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(2,-1,0)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,0)$.

Un punto y un vector director de s son $B\left(-3,2,-\frac{1}{2}\right)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-1,1,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso se hace lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ linealmente dependiente del vector que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = \left[\left(-3,2,-\frac{1}{2}\right) - (2,-1,0)\right] = \left(-5,3,-\frac{1}{2}\right).$$

El vector $\vec{w}$ considerado puede ser, por ejemplo: $\vec{w} = (10,-6,1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 10 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 20 + 6 - 2 = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

$b)$

El plano π pedido tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas y contiene al punto $P(2, 0, -1)$:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-2(x-2) + (z+1) - 2(z+1) - y = 0;\ -2(x-2) - y - (z+1) = 0;$$

$$-2x + 4 - y - z - 1 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0}.$$

****

5º) a) Los operadores A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30 % y el 20 % de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6 % de las resistencias producidas por A, el 5 % de las producidas por B y el 3 % de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a_1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuosa.

a_2) Si es defectuosa, calcula razonadamente la probabilidad de que proceda del operario A.

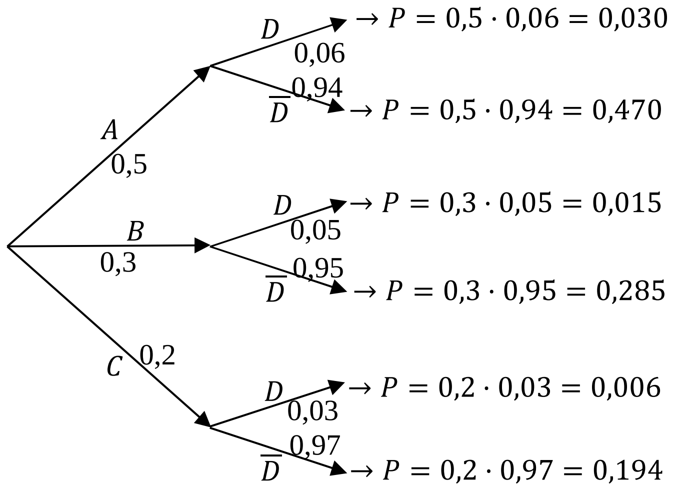
b) Las resistencias se empaquetan al azar en cajas de cinco unidades. Calcula razonadamente la probabilidad de:

b_1) Que en una caja haya exactamente tres resistencias fabricadas por B.

b_2) Que en una caja haya al menos dos fabricados por B

----

a)



a_1)

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0,5 \cdot 0,006 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,030 + 0,015 + 0,006 = \underline{0,051}.$$

a_2)

$$P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0,5 \cdot 0,006}{0,5 \cdot 0,006 + 0,3 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03} = \frac{0,030}{0,030 + 0,015 + 0,006} = \frac{0,030}{0,051} = \underline{0,5882}.$$

b)

b_1) Se trata de una distribución binomial cuya probabilidad es: $P = \binom{n}{x} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$, siendo $p = 0,3$ la probabilidad de que la resistencia la haya producido el operario B y $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0'7$ la probabilidad de que la resistencia no la haya producido el operario B; n es el número de resistencia del grupo y r es el número de las resistencias del grupo que ha producido el operario B.

$$P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} = \binom{5}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^{5-3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 =$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}49 = 10 \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}49 = \underline{0{,}1323}.$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$$P = P(BBBAA) \cdot P_5^{3,2} + P(BBBAC) \cdot P_5^{3} + P(BBBCC) \cdot P_5^{3,2} =$$

$$= \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}5^2 + \frac{5!}{3!} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}2^2 =$$

$$= 0{,}3^3 \left(\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}25 + 20 \cdot 0{,}10 + \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0{,}04 \right) = 0{,}027 \cdot (2{,}5 + 2 + 0{,}4) =$$

$$= 0{,}027 \cdot 4{,}9 = \underline{0{,}1323}.$$

b_2) La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguna producida por el operario B menos la probabilidad de que una haya sido fabricada por el operario B:

$$P = 1 - \left[\binom{5}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{5-0} + \binom{5}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{5-1} \right] =$$

$$= 1 - [1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^5 + 5 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^4] = 1 - (0{,}16807 + 0{,}36015) = 1 - 0{,}52822 =$$

$$= \underline{0{,}4718}.$$

****

<u>OPCIÓN B</u>

1º) Calcula razonadamente los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4}$. $b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos x}$.

$a)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = \frac{-8+12-4}{-8+20-16+4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+6x}{3x^2+10x+8} = \frac{12-12}{12-20+8} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{6x+6}{6x+10} = \frac{-12+6}{-12+10} =$$

$$= \frac{-6}{-2} = 3.$$

$$\underline{\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^3+5x^2+8x+4} = 3.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos x} = \frac{0\cdot L1}{2-2\cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{0+2\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{L(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\operatorname{sen} x} = \frac{L1+\frac{0}{1}}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2\cdot\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2\cdot\cos x} = \frac{\frac{1}{0+1}+\frac{1}{(0+1)^2}}{2\cdot\cos 0} = \frac{1+1}{2\cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\underline{\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot L(x+1)}{2-2\cos x} = 1.}$$

****

2º) Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 4$:

a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitados por sus gráficas.

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de $g(x)$ en el punto de abscisa $x = -3$.

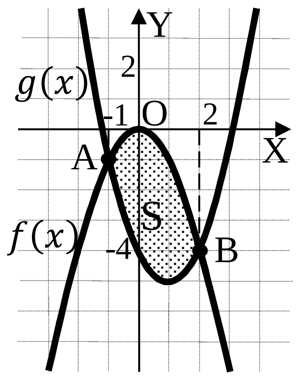
----

a)

Los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^2 - 2x - 4;\ 2x^2 - 2x - 4 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \to A(-1, -1) \\ x_2 = 2 \to B(2, -4) \end{cases}.$$



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Por ser las ordenadas de la parábola $f(x) = -x^2$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $g(x) = x^2 - 2x - 4$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^{2} [-x^2 - (x^2 - 2x - 4)]dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-x^2 - x^2 + 2x + 4) \cdot dx = \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = 15 - 6 = \underline{9\ u^2 = S}.$$

b)

La ecuación de la recta normal a una curva en un punto viene dada por la ecuación $y - y_0 = -\frac{1}{m'}(x - x_0)$, donde m' es la derivada de la curva en el punto.

El punto de tangencia es el siguiente:

$$g(-3) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 4 = 9 + 6 - 4 = 11\ \Rightarrow P(-3, 11).$$

La pendiente de la recta normal es la siguiente:

$g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow\ g'(-3) = 2 \cdot (-3) - 2 = -6 - 2 = -8.$

$m = \frac{-1}{g'(3)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}.$

$y - 11 = \frac{1}{8}(x + 3);\ \ 8y - 88 = x + 3.$

$\underline{La\ recta\ normal\ pedida\ es: n \equiv x - 8y + 91 = 0}.$

****

3º) Dadas las siguientes matrices cuadradas $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$a)$ ¿Tiene inversa la matriz $2I_3 + B$? Razona la respuesta.

$b)$ Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $2X + C = A - X \cdot B$.

$a)$

$$M = 2I_3 + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = |2I_3 + B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ 2I_3 + B\ es\ invertible.}$$

$b)$

$$2X + C = A - X \cdot B;\ \ 2X + X \cdot B = A - C;\ \ X \cdot 2I + X \cdot B = A - C.$$

Sacando X factor común por la izquierda en el primer término:

$$X \cdot (2I + B) = A - C;\ \ X \cdot M = N.$$

Multiplicando los dos términos por la derecha por M^{-1}:

$$X \cdot M \cdot M^{-1} = N \cdot M^{-1};\ \ X \cdot I = N \cdot M^{-1}\ \Rightarrow\ \underline{X = N \cdot M^{-1}}. \quad (*)$$

$$N = A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 + 2F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de $N\ y\ M^{-1}$:

$$X = N \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.}$$

****

4º) a) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta s, en su forma general o implícita, que contiene a los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$.

b) Encuentra razonadamente un punto que equidiste de P y Q y que pertenezca a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases}, \lambda \in R$.

----

a)

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (4,-4,2)$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{PQ} = (4,-4,2)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_s} = (2,-2,1)$.

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}. \qquad s \equiv \begin{cases} x = -y+1 \\ y-1 = -2z-4 \end{cases}.$$

La expresión de s por unas ecuaciones generales o implícitas es la siguiente:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ y+2z+3=0 \end{cases}}.$$

b)

El punto medio del segmento que forman los puntos $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$ es $M(2,-1,-1)$.

El plano π, bisector del segmento $\overline{PQ}$ tiene por expresión general a la ecuación $\pi \equiv 2x - 2y + z + D = 0$. Teniendo en cuenta que contiene al punto $M(2,-1,-1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x-2y+z+D=0 \\ M(2,-1-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2 - 2\cdot(-1) + (-1) + D = 0;$$

$4+2-1+D=0;\ \ 5+D=0 \Rightarrow D=-5\ \Rightarrow\ \pi \equiv 2x-2y+z-5=0.$

La intersección del plano $\pi \equiv 2x-2y+z-5=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases}$ es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x-2y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -5 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+\lambda) - 2(-\lambda) + (-5) - 5 = 0;$$

$4+2\lambda+2\lambda-5-5=0;\ \ 4\lambda-6=0;\ \ 2\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}.$

El punto T de r que equidista de $P(0,1,-2)$ y $Q(4,-3,0)$ es el siguiente:

$$\left.\begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = -5 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{T\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}, -5\right)}.$$

****

5º) a) En mi casa dispongo de dos estanterías A y B. En A tengo 20 novelas, 10 ensayos y 10 libros de matemáticas y en la B tengo 12 novelas y 8 libros de matemáticas. Elijo una estantería al azar y de ella, también al azar, un libro. Calcula razonadamente la probabilidad de que:

a_1) El libro escogido sea de matemáticas.

a_2) Si el libro elegido resultó ser de matemáticas, que fuera de la estantería B.

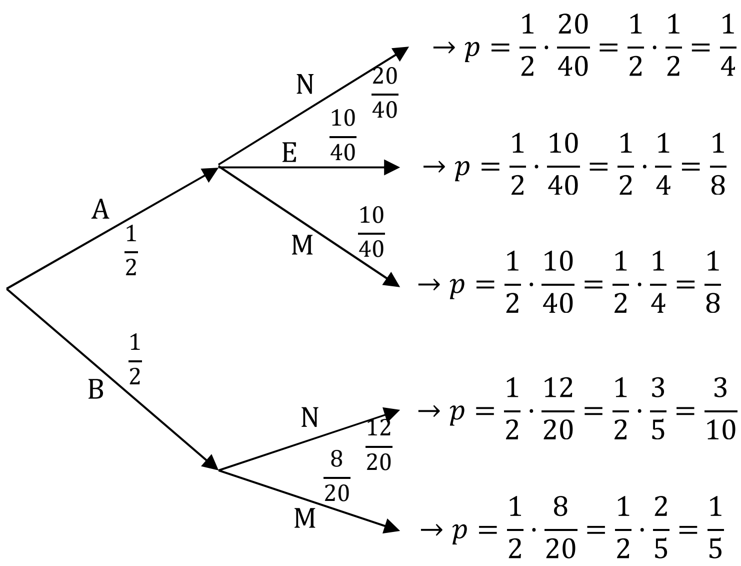
b) El tiempo de espera en una parada de autobús se distribuye según una distribución normal de media 15 minutos y desviación típica 5 minutos.

b_1) Calcula razonadamente la probabilidad de esperar menos de 13 minutos.

b_2) ¿Cuántos minutos de espera son superados por el 33 % de los usuarios? Razona la respuesta.

----

a)



a_1)

$$P = P(M) = P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{5+8}{40} = \underline{\frac{13}{40} = 0{,}3250.}$$

a_2)

$$P = P(B/M) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{P(B) \cdot P(M/B)}{P(A) \cdot P(M/A) + P(B) \cdot P(M/B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{10}{40} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{20}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5+8}{40}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{13}{40}} = \frac{1 \cdot 40}{5 \cdot 13} = \underline{\frac{8}{13} = 0{,}6154.}$$

$b)$

Datos: $\mu = 15;\ \ \sigma = 5.$

$b_1)$

$P(X < 13).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-15}{5}.$

$P(X < 13) = P\left(\frac{X-15}{5} < \frac{13-15}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-2}{5}\right) = P(Z < -0{,}4) =$

$= 1 - P(Z \geq 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446}.$

$b_2)$

$Z_0 = P(Z < Z_0) = 1 - 33\ \% = 67\ \% = 0{,}67.$

Mirando la tabla de distribución Normal $N(0, 1)$, a 0,6700 le corresponde en la tabla 0,44.

$\frac{X-15}{5} = 0{,}44;\ \ X = 15 + 2{,}2 = 17{,}2.$

$\underline{El\ 33\ \%\ de\ los\ usuarios\ supera\ los\ 17{,}2\ minutos\ de\ espera}.$

****